Fuzzy neurónové siete

FUZZY LOGIKA

Fuzzy logic was introduced in 1965 by Lofti A. Zadeh in his paper "Fuzzy Sets“, Information and Control 8 (1965), 338-353.

Úvod do teórie fuzzy množín

- Fuzzy logika je jazyk s vlastnou logikou a syntaxou. Tento jazyk nám umožňuje popísať správanie sa javov v nelineárnych systémoch.
- Umožňuje simulovať správanie sa systému, ktorý nie je možné do detailov popísať formou exaktných matematických formúl.
- Základným pojmom ***fuzzy logiky*** je ***fuzzy množina*.** Tá umožňuje na rozdiel od klasickej množiny, kde prvok do množiny buď patri alebo nepatrí, vyjadriť inú príslušnosť daného prvku k množine.

Úvod do teórie fuzzy množín

V klasickej teórii množín môžeme množinu popísať nasledovne

- vymenovaním prvkov M={x1, x2, ...}
- pravidlom, ktoré musia prvky patriace do množiny spĺňať
- charakteristickou funkciou, $\mu(x)=1$, ak x patrí do M a $\mu(x)=0$, ak x nepatrí do M

Úvod do teórie fuzzy množín

- V prípade klasických množín, hovoríme o takzvaných ***ostrých*** (crisp) množinách.
- V teórii fuzzy množín môžeme vyjadriť stupeň, s akým prvok do množiny patrí. Ide o ***neostré (fuzzy)*** množiny.
- Môžeme povedať, že ostré množiny sú špeciálnym typom fuzzy množín.
- Funkcia, ktorá priraďuje prvku jeho príslušnosť do fuzzy množiny, sa nazýva ***funkciou príslušnosti*****.**
- Prvky fuzzy množiny sú vybrané z nejakej univerzálnej množiny, ktorú nazývame ***univerzum*****.**

Úvod do teórie fuzzy množín

Definícia 1: **U** budeme nazývať **univerzum**, ak U je ľubovoľná množina prvkov.

$\mathcal{L}$ = <L, ∧, ∨ > je zväz: ∧, ∨ sú binárne relácie v množine **L**, ∨ je supremum (spojenie), ∧ je infimum (prienik), ktoré splňujú asociatívnosť, komutatívnosť a absorbciu, t. j. pre každé x, y patriace do **L** platí

$(x \vee y) \wedge x = x,$

$(x \wedge y) \vee x = x.$

Zväz sa nazýva úplný, ak každá neprázdna podmnožina L má supremum aj infimum.

V komplementárnom zväze existuje 0 a 1 a ku každému prvku existuje inverzný.

Úvod do teórie fuzzy množín

Príklad: Nech L=[0, 1], interval. $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ je zväz s operáciami definovanými:

$x \vee y = \max(x, y)$

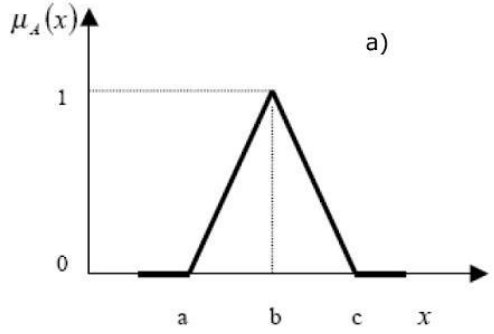
$x \wedge y = \min(x, y)$.

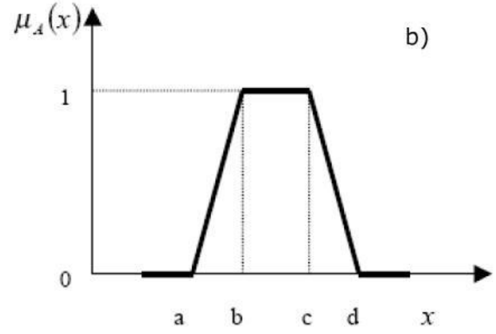
Definícia 2: Nech **U je univerzum** a **$\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, 1, 0 \rangle$ je zväz.** Potom fuzzy množina A v univerze U je daná funkciou $A: U \rightarrow L$.

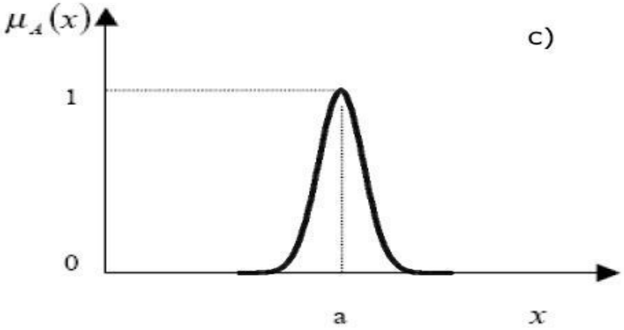
A sa niekedy označuje $\mu_A(x)$ a nazýva **funkciou príslušnosti** fuzzy množiny A.

Ak $\mu_A(x): U \rightarrow [0, 1]$, tak určuje stupeň príslušnosti prvku x do tejto množiny.

Grafy najčastejšie používaných *fuzzy množín (intervalových množín)*







Úvod do teórie fuzzy množín

Definícia 3: **Stupňom príslušnosti** prvku x do fuzzy množiny A nazývame hodnotu funkcie $\mu_A(x)$, ktorú funkcia A priradí prvku x. Množinu popisuje charakteristická funkcia μ_A: U → [0, 1].

- Budeme hovoriť, že prvok x patrí do množiny A, ak $\mu(x)=1$.
- Ak hodnota funkcie príslušnosti sa rovná 0, hovoríme, že prvok nepatrí do množiny .
- Inak hovoríme, že prvok čiastočne patrí do množiny.

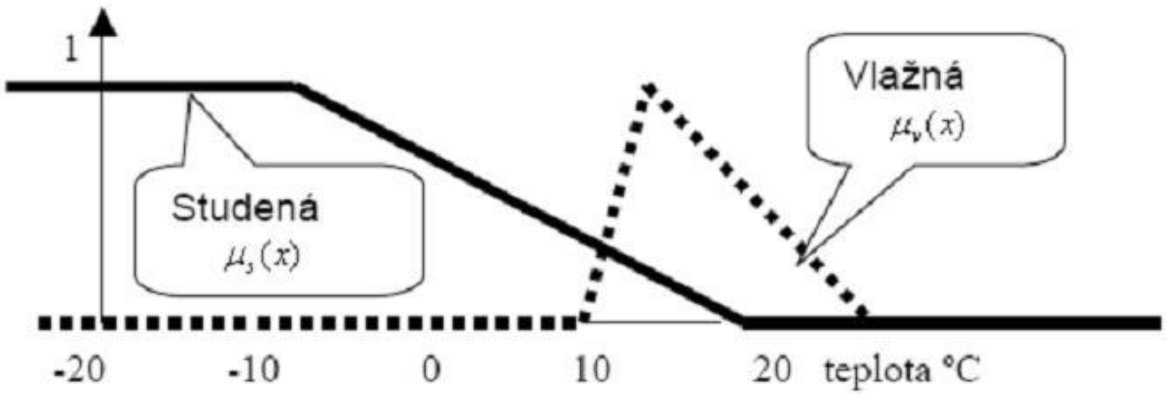
Úvod do teórie fuzzy množín

- Prvkom fuzzy množiny je **hodnota *lingvistickej premennej***. Lingvistická premenná nám umožňuje využiť pri popise reálnych javov výrazy ľudskej reči.

- To nám dovoľuje pracovať s neurčitosťou, ktorá je význačná pre bežne vyskytujúce sa problémy reálneho života. Poskytuje nám tak prostriedok na hľadanie riešení problémov, ktorých výskyt alebo správanie nevieme presne vyjadriť, no dokážeme ich nejakým spôsobom opísať.

- **Príklad:** ***Voda je studená.***
- V tomto konkrétnom prípade by lingvistickou premennou bola *„Teplota vody“* a hodnotou tejto premennej *„Studená“.*
- **lingvistická premenná:** *Teplota vody,*
- **hodnoty lingvistickej premennej:** *Studená, Vlažná, ...,*
- **univerzum:** čísla °C

Úvod do teórie fuzzy množín



Fuzzy operátory

Pri klasických množinách prvok do množiny buď patrí alebo nepatrí.

Základom operácii ostrých množín boli operácie výrokového počtu *and* , *or* , *implikácia* , *negácia*.

Vo fuzzy logike používame rozšírenie týchto operátorov na fuzzy množiny.

Fuzzy operátory

Definícia 4a:

Binárna operácia T v reálnom intervale [0,1] sa nazýva **t-norma,** akk:

- je asociatívna a komutatívna,
- je neklesajúca v prvom -- a teda v každom -- argumente,
- má 1 ako neutrálny prvok, T(u, 1) = T (1, u) = u , pre každé u patriace do [0,1].

Binárna operácia S v reálnom intervale [0,1] sa nazýva **t-konorma** akk:

- je asociatívna a komutatívna,
- je neklesajúca v oboch argumentoch,
- má 0 ako neutrálny prvok, S(u,0) = S(0,u) = u, pre každé u patriace do [0,1].

Fuzzy konjunkcia

Definícia 4b: Binárnu operáciu T definovanú na reálnom uzavretom intervale [0,1] definujeme ako zobrazenie [0,1]x[0,1] → [0,1]. Budeme ju nazývať **fuzzy konjunkcia**, ak pre ľubovoľné $x, y, z \in [0,1]$ bude spĺňať nasledujúce podmienky

- má jednotku ako neutrálny prvok $T(x,1) = x$
- je neklesajúca $x < y \Rightarrow T(x,z) \leq T(y,z)$
- je komutatívna $T(x,y) = T(y,x)$
- je asociatívna $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

- Je to t-norma?

Fuzzy konjunkcia

Z pohľadu množín sa na t - *normu* môžeme pozerať ako na prienik klasických množín.

Príklady t- *noriem:*

Gödelova konjunkcia: $$x \wedge_G y = \min(x, y)$$

Lukasieviczova konjunkcia:

$$x \wedge_L y = \begin{cases} x + y - 1, \text{pre } x + y - 1 > 0, \\ 0, \text{inak.} \end{cases}$$

Produktová konjunkcia: $$x \wedge_P y = x.y$$

Fuzzy konjunkcia

Definícia 5: **Fuzzy prienik** je operácia na fuzzy množinách vyjadrená pomocou fuzzy konjunkcie

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

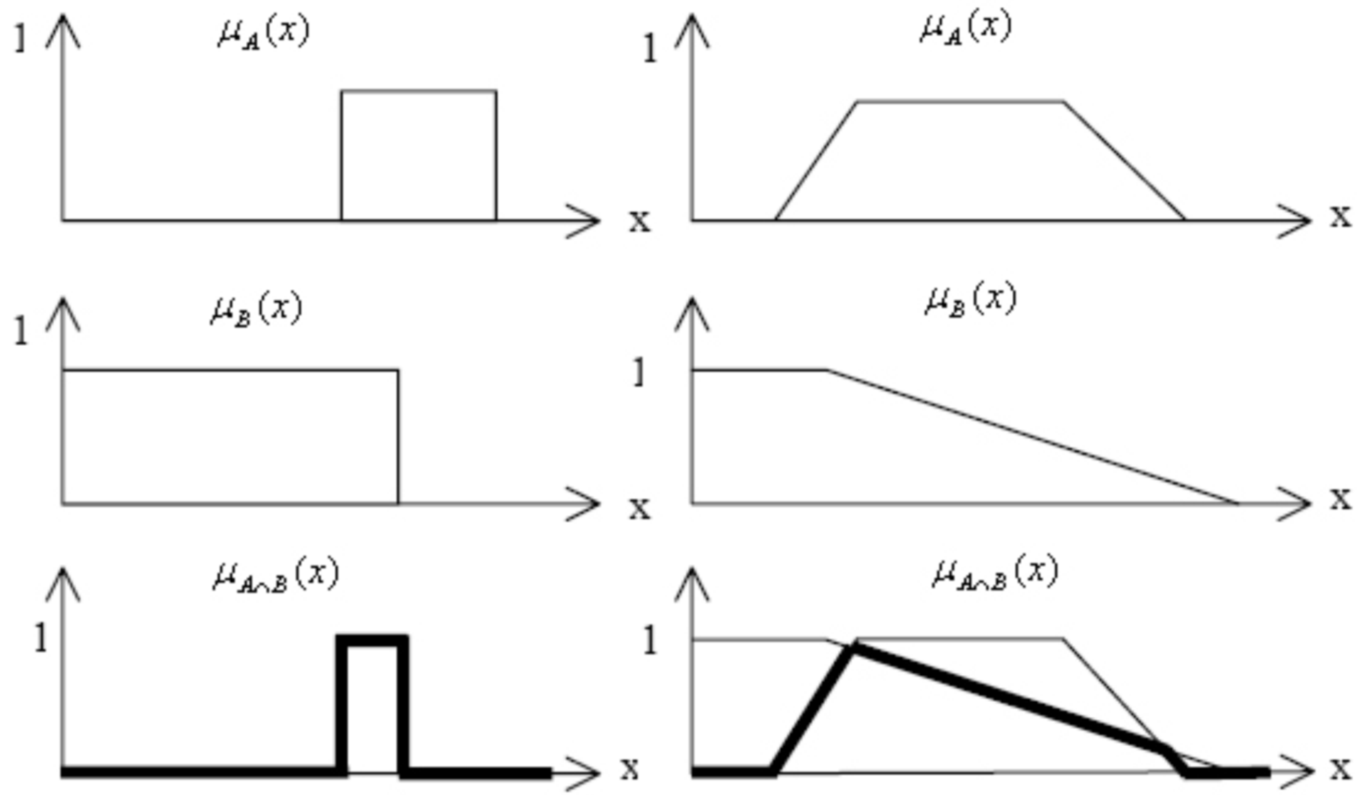
Majme dve fuzzy množiny ktorých hodnoty sú definované na univerze , potom prienikom týchto množín založenom na *T - norme*, je fuzzy množina definovaná na univerze s funkciou príslušnosti

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

pre každé

$$x \in U$$

Fuzzy konjunkcia



Fuzzy disjunkcia

Definícia 6: Binárnu operáciu ***S***, definovanú na reálnom uzavretom intervale [0, 1], definujeme ako zobrazenie [0,1]x[0,1]→ [0,1]. Budeme ju nazývať **fuzzy disjunkcia**, ak bude spĺňať nasledujúce podmienky

ma nulu ako neutrálny prvok $$S(x,0) = x$$

je neklesajúca $$x < y \Rightarrow S(x, y) \le S(y, z)$$

je komutatívna $$S(x, y) = S(y, x)$$

je asociatívna $$S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$$

pre ľubovoľné *x, y, z* z intervalu [0, 1].

Z pohľadu množín sa na *t - konormu* môžeme pozerať ako na zjednotenie klasických množín.

Fuzzy disjunkcia

Niekoľko najčastejšie používaných – *S-noriem:*

Gödelova disjunkcia:

$$x \vee_G y = \max\{x, y\}$$

Lukasieviczova disjunkcia:

$$x \vee_L y = \begin{cases} x + y, \text{ ak } x + y < 1 \\ 1, \text{ inak.} \end{cases}$$

Produktová disjunkcia:

$$x \vee_P y = x + y - x.y$$

Fuzzy disjunkcia

Definícia 7: **Fuzzy zjednotenie** je operácia na fuzzy množinách, vyjadrená pomocou fuzzy disjunkcie

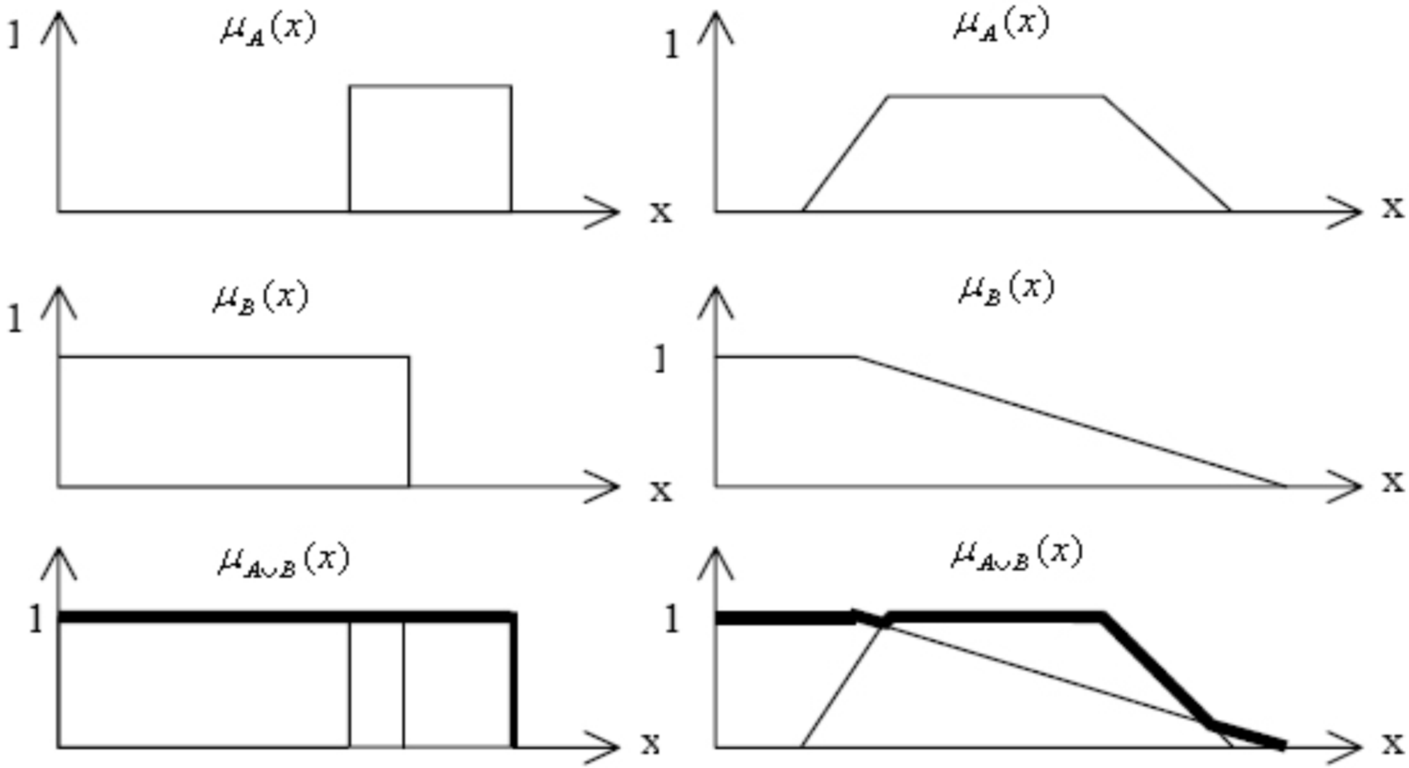
$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Majme dve fuzzy množiny, ktorých hodnoty sú definované na univerze , potom zjednotenie týchto množín založenom na *S - norme,* je fuzzy množina definovaná na univerze s funkciou príslušnosti

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

pre každé *x* z univerza *U.*

Fuzzy disjunkcia



Φ - operátor

Majme *t – normu* T. Potom binárnu operáciu ϕ, definovanú na reálnom uzavretom intervale [0,1], definujeme ako zobrazenie [0,1] x [0, 1]⟶[0,1] , ktoré budeme ***nazývať Φ– operátor***, ak pre každé *x, y, z* v *[0,1]* platia nasledujúce 3 podmienky

$$\text{ak } x \leq y, \text{ potom } \varphi(\mathrm{z}, \mathrm{x}) \leq \varphi(\mathrm{z}, \mathrm{y})$$

$$T(x, \varphi(x, y)) \leq y$$

$$x \leq \varphi(y, T(y, x))$$

Fuzzy negácia

Definícia 10: Unárnu operáciu ⌐ , definovanú na reálnom uzavretom intervale <0,1> , ktorá definuje zobrazenie z <0,1> do <0, 1> budene nazývať ***negáciou,*** ak bude spĺňať nasledujúce podmienky.

⌐ je nerastúca

$$x \leq y \Rightarrow \neg(x) \geq \neg(y)$$

⌐(0)=1, ⌐(1)=0

Negáciu ⌐ definujeme nasledujúcim vzťahom $\neg(x) = 1 - x$

Fuzzy negácia

Ešte niektoré typy negácií:

Gödelova negácia:

$$\neg_G(x) = \begin{cases} 0, \text{ pre } x > 0 \\ 1, \text{ pre } x = 0 \end{cases}$$

Lukasieviczova negácia:

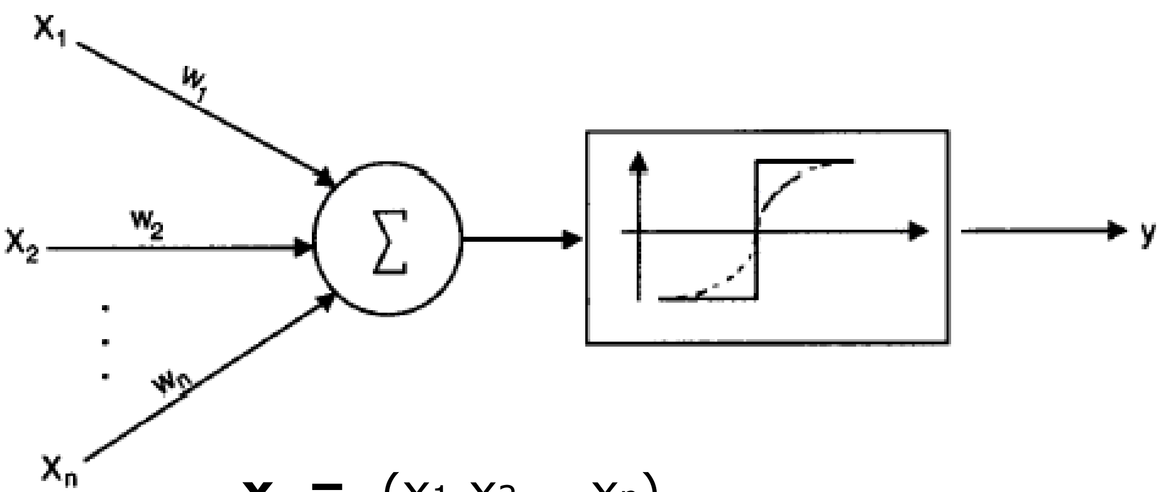
$$\neg_L(x) = 1 - x$$

Produktová negácia:

$$\neg_P(x) = \begin{cases} 0, \text{ pre } x > 0 \\ 1, \text{ pre } x = 0 \end{cases}$$

Fuzzy neuróny

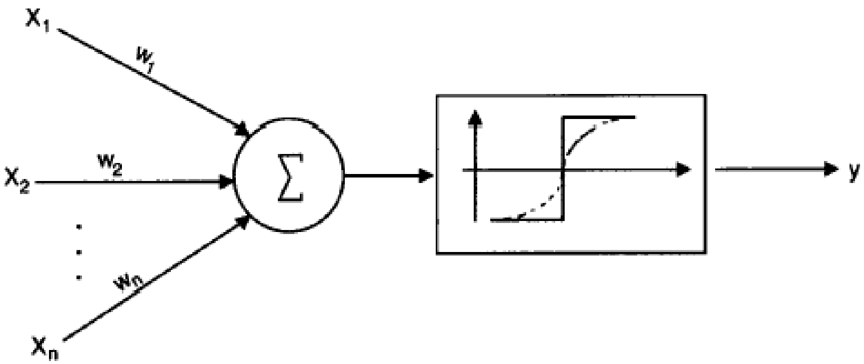
Fuzzy model umelého neurónu môže byť skonštruovaný použitím fuzzy operácií na niektorej úrovni neurónu



$y = f(\mathbf{w.x})$

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots\ x_n)$
$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots\ w_n)$

Fuzzy neuróny



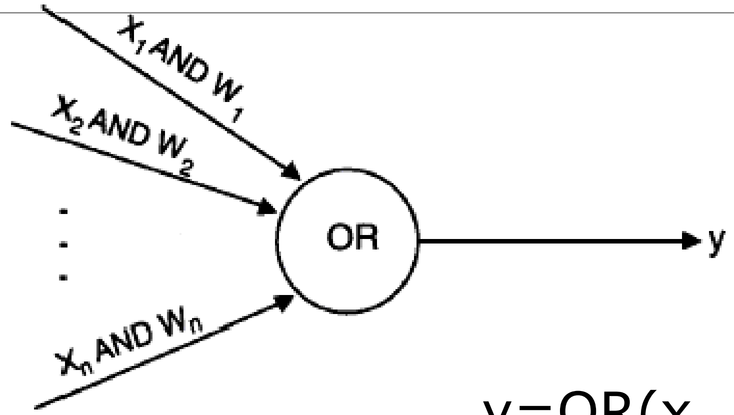
$$y = f(\mathbf{w}.\mathbf{x})$$

$$y = f(A(\mathbf{w},\mathbf{x}))$$

Namiesto váženej sumácie vstupov použijeme zložitejšiu agregačnú funkciu

Fuzzy zjednotenie, fuzzy prienik a, všeobecnejšie, *s-normy* and *t-normy* môžu byť použité ako agregačné funkcie pre vážený vstup do neurónu

OR Fuzzy neurón



$OR:[0,1]x[0,1]^n\text{->}[0,1]$

$y=OR(x_1 \text{ AND } w_1, x_2 \text{ AND } w_2 \dots x_n \text{ AND } w_n)$

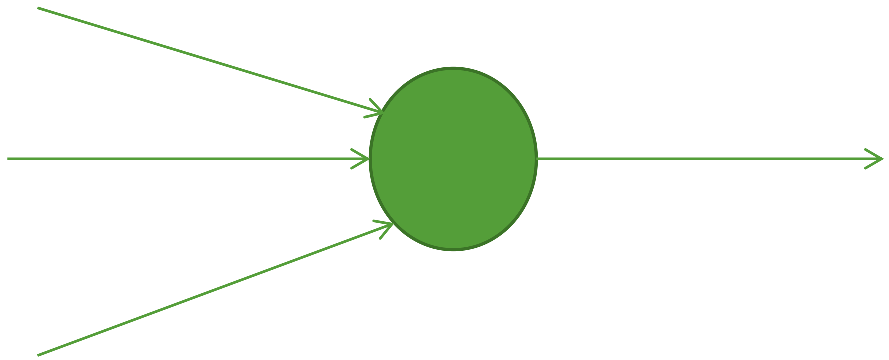
Prenosová funkcia f je lineárna

Ak $w_k=0$, tak w_k AND $x_k=0$

ak $w_k=1$, tak w_k AND $x_k= x_k$ závisí od x_k

OR Fuzzy neurón – príklad

$OR:[0,1]x[0,1]^3 \text{->} [0,1]$



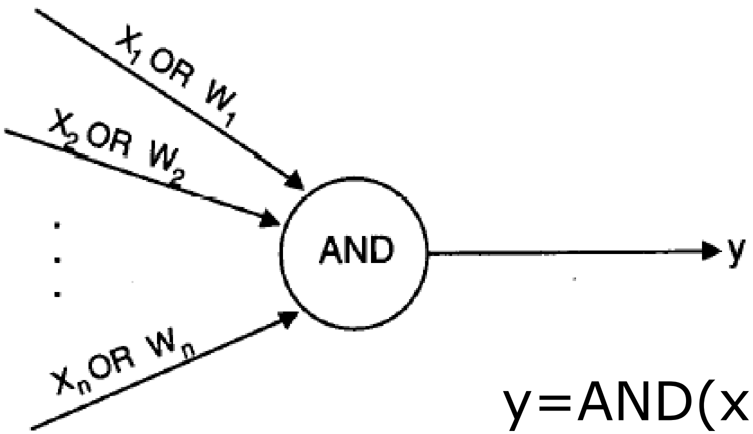
$y=OR(x_1 \text{ AND } w_1, x_2 \text{ AND } w_2, x_3 \text{ AND } w_3)$

W= (0.5, 0.7, 0.3),

X = (0.3, 0.8, 0.9)

Čo by počítal Goedlov neurón, Lukasiewiczov a čo produktový?

AND Fuzzy neuróny



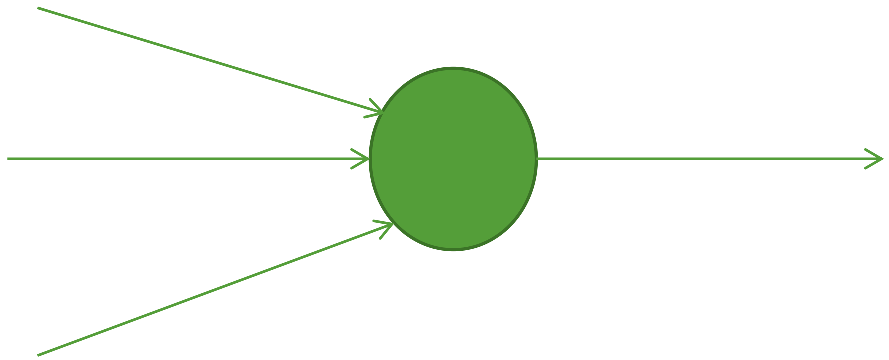
AND:[0,1]x[0,1]^n->[0,1]

y=AND(x_1 OR w_1, x_2 OR w_2 … x_n OR w_n)

Vo všeobecných formulách založených na *t*-normách, operátoroch iných než *min* a *max* môžu priniesť zaujímavé výsledky

AND Fuzzy neurón – príklad

$AND: [0,1] x [0,1]^3 \to [0,1]$



$y = AND(x_1 \text{ OR } w_1, x_2 \text{ OR } w_2, x_3 \text{ OR } w_3)$

W= (0.5, 0.7, 0.3),

X = (0.3, 0.8, 0.9)

Čo by počítal Goedlov neurón,
Lukasiewiczov a čo produktový?

Fuzzy neuróny

Oba typy OR a AND logických neurónov sú v princípe excitačné, t. j. $\uparrow x_k \Rightarrow \uparrow y$

Záporné váhy (inhibícia) – čo spôsobia?

V skutočnosti fuzzy množinové operácie sú definované na [0,1]

Urobiť vážené vstupy inhibičnými je vlastne vziať fuzzy doplnok excitačnej hodnoty príslušnosti $\neg x = 1\text{-}x$

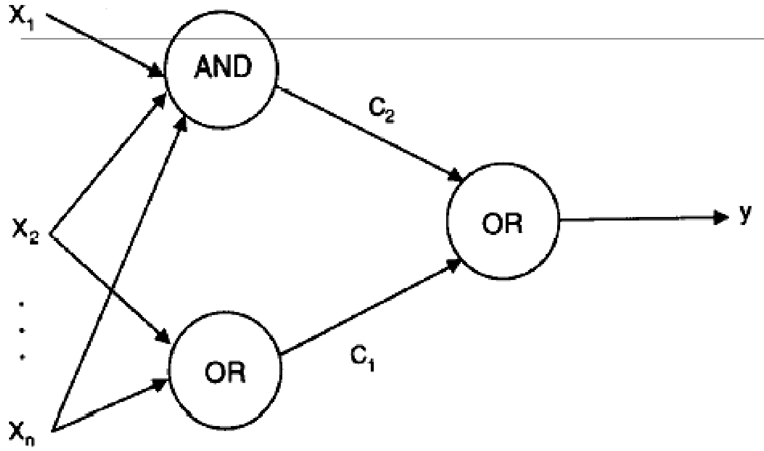
Vstup $\mathbf{x}=(x_1,..x_n)$ je rozšírený na $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n,\neg x_1,\ldots,\neg x_n)$

Fuzzy neuróny

Vážené vstupy x_i o w_i, kde o je t-norma a t-konorma, môžu byť vo všeobecnejších fuzzy reláciách, nie len jednoduchý súčin v štandardných neurónoch

Prenosová funkcia *f* môže byť nelineárna, napríklad sigmoidálna

OR / AND Fuzzy neurón



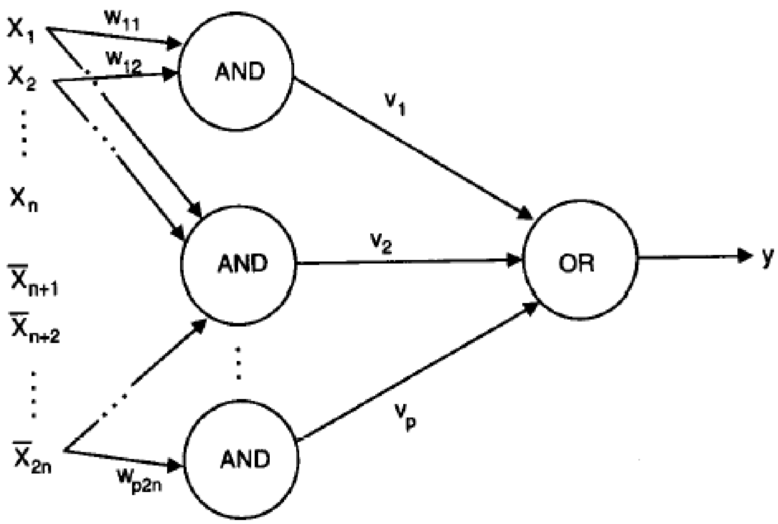
Zovšeobecnenie

Táto štruktúra môže produkovať zaujímavé výsledky

Ak $c_1 = 0$ a $c_2 = 1$ systém sa redukuje na samotný AND neurón

Ak $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$ systém sa chová tak ako jednoduchý OR neurón

Viacvrstvové fuzzy neurónové siete



Iná možnosť je mať v skrytej vrstve OR neuróny a výstupný neurón AND

V prípade 2 hodnotovej logiky sieť predstavuje logickú funkciu

Inak sieť reprezentuje nejakú fuzzy funkciu.

Učenie fuzzy neurónových sietí

Učenie s dozorom FNN pozostáva z modifikácie váh.

Množina trénujúcich dát ($\mathbf{x}_k$, d_k) pre k=1,2…n

$\mathbf{w}^{t+1}=\mathbf{w}^t + \Delta\mathbf{w}^t$, kde $\Delta\mathbf{w}^t=F(|d^t-y^t|)$,

y^t je vypočítaná hodnota

Učenie fuzzy neurónových sietí

Stredná kvadratická odchýlka E – miera chyby ako je to dobre nastavené

$E(\mathbf{w}) = ½\sum(d_k-y_k)^2$

Pokles gradientu $\Delta w_{i,j}=$ $$-\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}}$$

Ďakujem za pozornosť