Fuzzy neurónové siete

Gabriela Andrejková

Ústav informatiky

Prírodovedecká fakulta, UPJŠ, Košice

Abstrakt

V prvej časti sa oboznámime s fuzzy číslami, ktoré sú tiež použiteľné pri konštrukcii neurónov.
Spojiť výhody ponúkané fuzzy logikou a teóriou fuzzy množín s prednosťami neurónových sietí sa snaží nové odvetvie – fuzzy neurónové siete.
Podobne ako klasické neurónové siete, aj tieto je možné rozdeliť na statické (feedforward) a dynamické (feedback). Predmetom nášho záujmu budú statické fuzzy neurónové siete.

Obsah prednášky

Fuzzy neuróny

- Základným stavebným prvkom fuzzy neurónových sietí je fuzzy neurón, ktorý pracuje rovnako ako obyčajný neurón, má však navyše schopnosť vysporiadať sa s fuzzy informáciou.
- Podstatný rozdiel medzi oboma typmi neurónov z výpočtového hľadiska spočíva v definícii matematických operácií.
- Tie môžu byť vo fuzzy neuróne predstavované fuzzy aritmetikou alebo operáciami fuzzy logiky.

Úvod

- Uvažujme $\mathcal{U}$ klasickú množinu, ktorú budeme nazývať univerzom.
- **Fuzzy množina** A nad $\mathcal{U}$ je potom jednoznačne určená jej funkciou príslušnosti $\mu_A : \mathcal{U} \to \langle 0, 1 \rangle$ a nazýva sa tiež fuzzy podmnožinou univerza $\mathcal{U}$.
- Fuzzy množiny budeme v dalšom stotožňovať s ich funkciami príslušnosti, teda trieda $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ všetkých fuzzy podmnožín univerza $\mathcal{U}$ bude triedou všetkých funkcií f s $D(f) = \mathcal{U}$ a $H(f) \subseteq \langle 0, 1 \rangle$.
- Hodnotu $\mu_A(x) \in \langle 0, 1 \rangle$, ktorú fuzzy množina A priradí prvku $x \in \mathcal{U}$, nazývame **stupňom príslušnosti** prvku x do fuzzy množiny A. V prípade, že $\mu_A(x) = 0$, hovoríme, že x nepatrí do A, ak $\mu_A(x) = 1$, hovoríme, že x patrí do A.
- V prípade, že $\mu_A(x) \neq 0$ a $\mu_A(x) \neq 1$, hovoríme, že x čiastočne patrí do A.

Reálne fuzzy čísla

sú špeciálne fuzzy množiny v univerze reálnych čísel, pomocou ktorých je možné modelovať pojmy ako *asi 2*, *približne 3* a pod.

Definícia

Fuzzy číslom nazývame konvexnú fuzzy množinu $A \in \mathcal{F}(\mathrm{R})$*, ktorej funkcia príslušnosti je spojitá a existujú body* $a, b_1, b_2, c \in \mathrm{R}$ *také, že* $a \leq b_1 \leq b_2 \leq c$ *a platí:*

a) *pre každé* $x \in (-\infty, a) \cup (c, \infty)$ *je* $\mu_A(x) = 0$,

b) μ_A *je rastúca na* $\langle a, b_1 \rangle$ *a klesajúca na* $\langle b_2, c \rangle$,

c) $\mu_A(a) = 0$, $\mu_A(c) = 0$ *a pre všetky* $x \in \langle b_1, b_2 \rangle$ *je* $\mu_A(x) = 1$.

Pritom môže byť $a = -\infty$, $c = \infty$ *a* $b_1 = b_2$.

Množinu všetkých reálnych fuzzy čísel budeme označovať Γ.

Reálne fuzzy čísla

sú vlastne špeciálne fuzzy množiny, ktoré je možné zapisovať v rôznych tvaroch. Pri práci s fuzzy číslami budeme využívať ich dva rôzne zápisy. Prvý spôsob zápisu fuzzy čísla A je

$$A = \bigcup_{x=a}^{c} \Big(x, \mu_A(x)\Big) = \bigcup_{x=a}^{b_1} \Big(x, \mu_{A_L}(x)\Big) \cup \bigcup_{x=b_1}^{b_2} \Big(x, 1\Big) \cup \bigcup_{x=b_2}^{c} \Big(x, \mu_{A_R}(x)\Big),$$

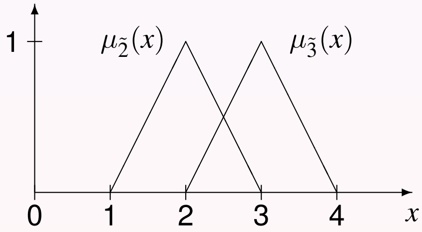
kde A_L predstavuje rastúcu a A_R klesajúcu časť fuzzy množiny. Fuzzy čísla $\tilde{2}$ *asi 2* a $\tilde{3}$ *asi 3* je možné modelovať napríklad takto:

$$\tilde{2} = \bigcup_{x=1}^{2} \Big(x, x-1\Big) \cup \bigcup_{x=2}^{3} \Big(x, 3-x\Big), \tag{1}$$

$$\tilde{3} = \bigcup_{x=2}^{3} \Big(x, x-2\Big) \cup \bigcup_{x=3}^{4} \Big(x, 4-x\Big). \tag{2}$$

Znázornenie fuzzy čísel

Tieto fuzzy čísla sú znázornené na nasledujúcom obrázku. Takéto fuzzy čísla, ktorých funkcia príslušnosti je trojuholníkového tvaru so základňou v $\langle a, c\rangle$ a vrcholom v $b_1 = b_2$, nazývame tiež **trojuholníkové** fuzzy čísla.



Grafické znázornenie možného tvaru fuzzy čísel $\tilde{2}$ a $\tilde{3}$.

Iný spôsob zápisu fuzzy čísla

$$A = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} \Big(x, \mu_A(x) \Big) \tag{3}$$

je pomocou α-rezov

$$A = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot A_{(\alpha)}, \tag{4}$$

pričom $A_{(\alpha)}$ znamená α-rez fuzzy množiny A a α je reálne číslo. (Rez $A_{(\alpha)} = \{x; \alpha \leq \mu_A(x)\}$, je to klasická množina.)
Symbol $\alpha \cdot A_{(\alpha)}$ však nepredstavuje množinu prvkov z α-rezu $A_{(\alpha)}$ vynásobených číslom α, ale fuzzy množinu, ktorej funkciu príslušnosti dostaneme vynásobením charakteristickej funkcie α-rezu $A_{(\alpha)}$ číslom α.

Iný spôsob zápisu fuzzy čísla

Nech A je nejaké fuzzy číslo a α reálne číslo z $\langle 0, 1 \rangle$. Charakteristická funkcia $\mathcal{X}_{A_{(\alpha)}}$ α-rezu $A_{(\alpha)}$ je potom

$$\mathcal{X}_{A_{(\alpha)}}(x) = \begin{cases} 1 & \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Fuzzy množina $\alpha \cdot A_{(\alpha)}$ je teda určená takouto funkciou príslušnosti

$$\mu_{\alpha \cdot A_{(\alpha)}}(x) = \begin{cases} \alpha & \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Nosič fuzzy množiny A je klasická množina $SuppA = \{x; Ax \neq 0\}$

Kladné, záporné, inverzné fuzzy číslo

Definícia

Fuzzy číslo A *je* **kladné** *(resp.* **záporné***), akk* $SuppA \subseteq (0, \infty)$ *(resp. ak* $SuppA \subseteq (-\infty, 0)$*). Ak* A *nie je ani kladné, ani záporné, potom je* **nulové**. **Opak** A *je fuzzy číslo -*A *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x).$$

Ak A *nie je nulové fuzzy číslo, potom k nemu* **inverzné** *fuzzy číslo je* A^{-1} *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A^{-1}}(x) = \begin{cases} \mu_A(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Definícia

Nech U je univerzum je na ňom definovaná binárna operácia $*$ a A, B su fuzzy podmnožiny U. Rozšírenie tejto operácie na fuzzy množiny A, B je fuzzy množina $C = A * B$ s funkciou príslušnosti

$$Cz = \vee\{Ax \wedge By; x, y \in U \, a \, z = x * y, \; inak \, 0\}$$

pre všetky $z \in U$.

Kladné, záporné, inverzné fuzzy číslo

Táto definícia je v súlade s princípom rozšírenia, podľa ktorého je

$$\mu_{-A}(z) = \sup_{x \in \mathcal{U},\, z=-x} (\mu_A(x)) = \mu_A(-z)$$

a

$$\mu_{A^{-1}}(z) = \sup_{x \in \mathcal{U},\, z=1/x} (\mu_A(x)) = \mu_A(1/z).$$

Opakom kladného fuzzy čísla $\tilde{2}$ z predchádzajúceho príkladu je záporné fuzzy číslo $-\tilde{2} =$

$$\bigcup_{x=-2}^{-1} \left(x,\ -x-1\right) \cup \bigcup_{x=-3}^{-2} \left(x, 3+x\right) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \langle \alpha-3, -2\rangle \cup \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \langle -2, -\alpha-1\rangle.$$

Kladné, záporné, inverzné fuzzy číslo

Inverzné fuzzy číslo k $\tilde{2}$ je $\tilde{2}^{-1} =$

$$\bigcup_{x=1/2}^{1}\left(x, \frac{1}{x}-1\right) \cup \bigcup_{x=1/3}^{1/2}\left(x, 3-\frac{1}{x}\right) = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{(\alpha+1)} \right\rangle \cup \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \left\langle \frac{1}{(3-\alpha)}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Uvažujme teraz fuzzy čísla A, B. Ich súčtom je fuzzy číslo $C = A \oplus B$, ktorého funkciu príslušnosti môžeme určiť pomocou princípu rozšírenia nasledovne.

$$\mu_C(z) = \sup_{x,y \in \mathcal{U},\, z=x+y} \left(\mu_A(x) \ \mathbf{t} \ \mu_B(y)\right).$$

Ďalšie operácie - kniha V. Nováka

Vo všeobecnosti je však ťažké funkciu príslušnosti μ_C presne vyjadriť. Na určenie súčtu, súčinu, prípadne iných operácií na množine fuzzy čísel je preto možné využiť nasledovné tvrdenie, ktoré nám umožňuje previesť operácie s fuzzy číslami na operácie s ich α-rezmi.

Veta

Nech A_1, A_2 sú fuzzy čísla, $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ je rastúca (resp. klesajúca) spojitá binárna funkcia a $B = f(A_1, A_2)$ fuzzy číslo indukované z A_1, A_2 pomocou princípu rozšírenia, kde $\mathbf{t} = \mathbf{t_G}$. Potom pre každé $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$B_{(\alpha)} = f({A_1}_\alpha, {A_2}_\alpha),$$

kde $f({A_1}_\alpha, {A_2}_\alpha) = \{y \mid y = f(x_1, x_2) \ \& \ \mu_{A_1}(x_1) \geq \alpha \ \& \ \mu_{A_2}(x_2) \geq \alpha\}.$

Keďže sčítanie, ako aj násobenie kladných čísel, je rastúca operácia a násobenie záporných čísel je klesajúca operácia, môžeme dané tvrdenie aplikovať na súčet $\oplus$ a násobenie $\odot$ kladných, resp. záporných fuzzy čísel. Násobenie fuzzy čísel s rozdielnymi znamienkami, ako aj rozdiel $\ominus$ dvoch fuzzy čísel je možné realizovať, ak si uvedomíme, že $(-A) \odot B = -(A \odot B)$ a $A \ominus B = A \oplus (-B)$. Podobne podiel $\oslash$ dvoch fuzzy čísel je možné previesť na násobenie

$$A \oslash B = A \odot B^{-1}$$

v prípade, že B nie je nulové fuzzy číslo.

Podľa tvrdenia je teda možné súčet a súčin dvoch fuzzy čísel A, B vyjadriť nasledovne:

$$A \oplus B = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot (A \oplus B)_{(\alpha)} = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot (A_{(\alpha)} + B_{(\alpha)})$$

$$A \odot B = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot (A \odot B)_{(\alpha)} = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot (A_{(\alpha)} \, . \, B_{(\alpha)}).$$

Ak teda opäť uvažujeme fuzzy čísla $\tilde{2}$ a $\tilde{3}$, tak

$$\tilde{2} \oplus \tilde{3} = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \langle 2\alpha + 3, 5\rangle \cup \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \langle 5, 7 - 2\alpha\rangle$$

$$\tilde{2} \odot \tilde{3} = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \langle \alpha^2 + 3\alpha + 2, 6\rangle \cup \bigcup_{\alpha=0}^{1} \alpha \cdot \langle 6, 12 - 7\alpha + \alpha^2\rangle.$$

Podobným spôsobom ako súčet alebo súčin dvoch fuzzy čísel je pre fuzzy čísla možné zaviesť aj iné analógie operácií a pojmov bežne používaných pri práci s reálnymi číslami.
To umožňuje rozšíriť už známe matematické alebo výpočtové modely tak, že sú schopné pracovať aj istou neistotou týkajúcou sa ich vstupných parametrov.

Fuzzy neuróny

Základným stavebným prvkom fuzzy neurónových sietí je fuzzy neurón, ktorý pracuje rovnako ako obyčajný neurón, má však navyše schopnosť vysporiadať sa s fuzzy informáciou.
Podstatný rozdiel medzi oboma typmi neurónov z výpočtového hľadiska spočíva v definícii matematických operácií.
Tie môžu byť vo fuzzy neuróne predstavované

- fuzzy aritmetikou - vstupy aj váhy sú fuzzy čísla a operácie v neuróne sú reprezentované fuzzy aritmetikou,
- operáciami fuzzy logiky - vstupy a váhy sú z intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a neurónové operácie sú vyjadrené pomocou operácií fuzzy logiky.

Fuzzy neuróny

Neurón predstavuje zobrazenie $\nu : \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$, ktoré je možné vyjadriť ako

$$\nu(\mathbf{x}) = \Psi(\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w})),$$

kde $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ reprezentuje n-rozmerný vstup do neurónu, $\mathbf{w}$ je vektor váh, $\Psi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ je nejaká nelineárna prenosová funkcia a $\Lambda : \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \times \mathrm{R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{R}$ je funkcia vyjadrujúca mieru podobnosti vektorov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{w}$. V prípade, že agregačná funkcia Λ je reprezentovaná skalárnym súčinom, tak pre výstup y neurónu platí:

$$y = \nu(\mathbf{x}) = \Psi(\sum_{i=1}^{n} x_i w_i). \tag{5}$$

Tento neurón využijeme ako základ na demonštráciu oboch typov fuzzy neurónu.

Vstupy v bežných neurónových sieťach sú konkrétne hodnoty z intervalov $I_1, \ldots, I_n$ transformované do intervalov $\langle 0, 1 \rangle$, prípadne $\langle -1, 1 \rangle$.

V niektorých prípadoch je výhodnejšie zostrojiť nad jednotlivými intervalmi I_j niekoľko fuzzy množín a ako vstupy do siete uvažovať stupne príslušnosti týchto fuzzy množín.

Vektor vstupných signálov $\mathbf{x}$ do neurónu je teda v tomto prípade ohraničený jednotkovou hyperkockou $\langle 0, 1 \rangle^n$. Podobne aj vektor váh $\mathbf{w}$ uvažujeme z $\langle 0, 1 \rangle^n$.

Norma a konorma

Binárna operácia $\mathbf{T}$ v reálnom intervale $\langle 0, 1\rangle$ sa nazýva t-norma, akk:

- je asociatívna a komutatívna,
- je neklesajúca v prvom – a teda v každom – argumente,
- má 1 ako neutrálny prvok, $T(u, 1) = T(1, u) = u$, pre každé u patriace do $\langle 0, 1\rangle$.

Binárna operácia $\mathbf{S}$ v reálnom intervale $\langle 0, 1\rangle$ sa nazýva t-konorma, akk:

- je asociatívna a komutatívna,
- je neklesajúca v oboch argumentoch,
- má 0 ako neutrálny prvok, $S(u, 0) = S(0, u) = u$, pre každé u patriace do $\langle 0, 1\rangle$.

Matematické operácie na týchto signáloch sú reprezentované zovšeobecnenými pravdivostnými funkciami konjunkcie, disjunkcie, negácie, prípadne implikácie.
Ak vo vzťahu (5) nahradíme operátor $.$ t-normou $\mathbf{t}$ a operátor $+$ príslušnou t-konormou $\mathbf{s_t} = \mathbf{s}$, potom mieru podobnosti vektorov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{w}$ môžeme vyjadriť ako

$$\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \underset{i=1}{\overset{n}{\mathbf{s}}}(x_i \ \mathbf{t} \ w_i) \ \in \langle 0, 1 \rangle. \tag{6}$$

Výstup y tohoto neurónu bude

$$y = \nu(\mathbf{x}) = \Psi(\underset{i=1}{\overset{n}{\mathbf{s}}}(x_i \ \mathbf{t} \ w_i)) \ \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde Ψ je nejaká nelineárna aktivačná funkcia.

- Jednou z charakteristických vlastností funkcie Λ je to, že je neklesajúca. To znamená, že pre ľubovoľné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ také, že $x_i \leq y_i, \ i = 1, \ldots, n$, platí $\Lambda(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \leq \Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{w})$.
- Skutočne, vzhľadom na to, že t-norma aj s-konorma sú neklesajúce funkcie, je aj funkcia Λ neklesajúca.
- Funkcia Ψ je sigmoidálna, čiže tiež neklesajúca, preto aj funkcia ν je neklesajúca.
- Každý takto definovaný fuzzy neurón teda predstavuje neklesajúcu funkciu.

- Ak takéto fuzzy neuróny zoskupíme do jednej vrstvy, tá bude tiež predstavovať neklesajúce zobrazenie.
- Vzhľadom na to, že vo viacvrstvových sieťach sú vstupmi do neurónov bud vstupy z vonkajšieho sveta (pre vstupnú vrstvu), alebo výstupy neurónov z predchádzajúcej vrstvy (pre vyššie vrstvy), aj viacvrstvová sieť zložená z takýchto neurónov predstavuje neklesajúce zobrazenie.
- Znamená to teda, že takýmito sieťami je možné aproximovať nanajvýš neklesajúce funkcie. Na odstránenie tohoto obmedzenia je potrebné zvoliť inú funkciu, ktorá by vyjadrovala mieru podobnosti vektorov $\mathbf{x}$ a $\mathbf{w}$.

Príklad

$$\Lambda_1(\mathbf{x},\mathbf{w}) = \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{n}(1-|x_i-w_i|) = \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{n}(\xi_1(x_i,w_i)) \quad \text{alebo}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_2(\mathbf{x},\mathbf{w}) &= \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\Big((x_i\phi_{\mathbf{t}}w_i)\,\mathbf{t}(w_i\,\phi_{\mathbf{t}}\,x_i) + (\mathbf{n_t}(x_i)\phi_{\mathbf{t}}\,\mathbf{n_t}(w_i))\,\mathbf{t}(\mathbf{n_t}(w_i)\,\phi_{\mathbf{t}}\,\mathbf{n_t}(x_i))\Big)\right. \\ &= \mathop{\mathbf{S}}_{i=1}^{n}(\xi_2(x_i,w_i)),\end{aligned}$$

pričom

$$\begin{aligned}\mathbf{n_t}(z) &= n_{\mathbf{t_L}}(z) = 1-z, \\ \phi_{\mathbf{t}}(u,v) &= \phi_{\mathbf{t_G}}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{ak } u \leq v \\ v & \text{ak } u > v. \end{cases}\end{aligned}$$

Príklad - pokračovanie

O Λ_1 ukážeme, že nie je monotónna v prípade, že $\mathbf{s} = \max$. Pre jednoduchosť sa obmedzíme na dvojrozmerný prípad.
Potrebujeme nájsť trojicu bodov $\mathbf{x} < \mathbf{y} < \mathbf{z}$ takých, že
$\Lambda_1(\mathbf{x}) < \Lambda_1(\mathbf{y}) \quad \& \quad \Lambda_1(\mathbf{y}) > \Lambda_1(\mathbf{z})$.
Vezmime $\mathbf{y} = \mathbf{w} = (w_1, w_2)$, $\mathbf{x} = (w_1 - \delta, w_2 - \delta)$, $\mathbf{z} = (w_1 + \delta, w_2 + \delta)$ pre nejaké vhodné $\delta > 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} 1 - |y_1 - w_1| &= 1 - |y_2 - w_2| = 1, \\ 1 - |x_1 - w_1| &= 1 - |x_2 - w_2| = 1 - \delta < 1, \\ 1 - |z_1 - w_1| &= 1 - |z_2 - w_2| = 1 - \delta < 1. \end{aligned}$$

Z týchto vzťahov a definície funkcie Λ_1 vyplýva, že

$$\Lambda_1(\mathbf{x}) < \Lambda_1(\mathbf{y}) \quad \& \quad \Lambda_1(\mathbf{z}) < \Lambda_1(\mathbf{y}).$$

Čo sme chceli ukázať.

Štruktúra fuzzy neurónových sietí založených na fuzzy aritmetike

- Budeme využívať niektoré poznatky z oblasti fuzzy aritmetiky.
- Štruktúra fuzzy neurónových sietí tohoto typu je opäť rovnaká ako u bežných neurónových sietí, avšak vstupy do neurónov, váhy, ako aj výstupy z neurónov sú fuzzy čísla.
- V tomto prípade fuzzy neurón predstavuje zobrazenie $\nu : \Gamma^n \to \Gamma$, pričom Γ označuje množinu všetkých reálnych fuzzy čísel.
- Agregačnú a prenosovú funkciu fuzzy neurónu získame z agregačnej a prenosovej funkcie klasického neurónu pomocou princípu rozšírenia.
- Takéto fuzzy neurónové siete sú v literatúre označené ako regulárne fuzzy neurónové siete, skrátene FNN.

- V prípade, že umožníme, aby agregačné a prenosové funkcie boli definované aj inak, než z príslušných funkcií klasického neurónu cez princíp rozšírenia a tiež, aby sa v sieti mohli vyskytovať aj klasické neuróny, dostávame sieť, ktorú v literatúre označujú ako hybridnú fuzzy neurónovú sieť, skrátene HFNN.
- Je to teda sieť, ktorej vstupy aj výstupy sú fuzzy čísla, avšak vnútorná štruktúra siete je hybridná. To znamená, že sa v sieti môžu vyskytovať
  a) vyššie uvažované fuzzy neuróny,
  b) neuróny, ktorých vstupmi aj výstupmi môžu byť ako reálne čísla, tak aj fuzzy čísla,
  c) klasické neuróny.

Kedže sa v sieti môžu vyskytovať aj neuróny typu b), c), upustíme aj od požiadavky, aby všetky váhy boli fuzzy čísla.

Vstupy do siete sú fuzzy čísla N, M. Neuróny vo vstupnej vrstve predstavujú identické zobrazenie, teda výstup z neurónu N_1 je N, z neurónu N_2 M. Výstupom agregačnej funkcie Λ_3 neurónu N_3 je

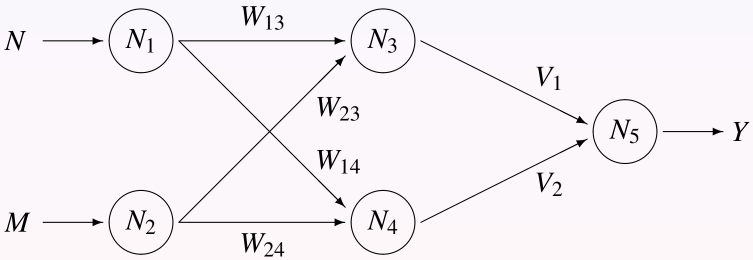
$$\Lambda_3(N, M, W_{13}, W_{23}) = L_3 = (N \odot W_{13}) \oplus (M \odot W_{23}), \tag{7}$$

kde $\odot$, $\oplus$ predstavujú fuzzy súčin, resp. súčet získaný princípom rozšírenia. To znamená, že ak označíme $P = A \oplus B$ a $Q = A \odot B$, tak

$$\mu_P(z) = \sup_{z=x+y} (\mu_A(x) \ \mathbf{t} \ \mu_B(y)), \tag{8}$$

$$\mu_Q(z) = \sup_{z=x.y} (\mu_A(x) \ \mathbf{t} \ \mu_B(y)). \tag{9}$$

Príklad



Príklad jednoduchej fuzzy neurónovej siete.

Podobne pre neurón N_4

$$\Lambda_4(N, M, W_{14}, W_{24}) = L_4 = (N \odot W_{14}) \oplus (M \odot W_{24}).$$

Prenosové funkcie neurónov N_3, N_4 a N_5 uvažujeme rovnaké $\Psi_3 = \Psi_4 = \Psi_5 = \Psi$, získané napríklad z funkcie $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$ princípom rozšírenia. Výstup O_3 neurónu N_3 je teda

$$O_3 = \Psi(L_3), \tag{10}$$

podobne výstupom neurónu N_4 je

$$O_4 = \Psi(L_4).$$

Výstupom neurónu N_5 je

$$Y = \Psi(L_5),$$

kde

$$L_5 = \Lambda_5(O_3, O_4, W_{35}, W_{45}) = (O_3 \odot W_{35}) \oplus (O_4 \odot W_{45}).$$

Táto FNN teda zobrazuje (N, M) na Y (fuzzy číslo v $\langle 0, 1\rangle$), čo budeme označovať $Y = FNN(N, M)$.