Rekurentné neurónové siete

Hopfieldova neurónová sieť

Klasifikácia rekurentných sietí

Okrem všeobecnej klasifikácie neurónových sietí rozdeľujeme rekurentné siete podľa niekoľkých ďalších kritérií.

Prvým z nich je stupeň využitia spätných prepojení v sieťovej architektúre, pričom rozlišujeme siete na

- **plne rekurentné** - najvšeobecnejší typ rekurentných sietí, dovoľuje úplné vzájomné prepojenie všetkých neurónov v sieti, ako aj samo-prepojenia (prepojenia neurónov samých so sebou)
- **čiastočne rekurentné** - tieto siete obsahujú okrem väčšieho množstva dopredných prepojení aj malú množinu spätných prepojení, ktoré sú volené tak, aby zostali zachované niektoré vlastnosti typické pre dopredné siete.

Čiastočne rekurentné siete môžeme považovať za podmnožinu plne rekurentných sietí, ak chýbajúce spätné prepojenia nahradíme prepojeniami s konštantnými váhami $w_{ij}=0$. Preto všetky učiace algoritmy pre plne rekurentné siete môžeme použiť aj pre siete s čiastočnou rekurenciou.

Vzájomný vzťah prepojení medzi dvoma neurónmi v sieti

- **symetrické prepojenia** - pre každú dvojicu neurónov *i* a *j* platí, že prepojenie z neurónu *i* do neurónu *j* má vždy rovnakú váhu ako prepojenie opačné, teda $w_{ij}=w_{ji}$
- **nesymetrické prepojenia** - nie je splnená podmienka symetrie prepojení medzi dvoma neurónmi v sieti, prepojenia môžu mať ľubovoľné váhy

Pre siete, ktoré nemajú symetrické prepojenia, nie je zaručený ich prechod do stabilného stavu (situácia, keď sa stav siete nemení), zatiaľ čo siete, ktoré spĺňajú podmienku symetrie, vždy tento stabilný stav dosiahnu.

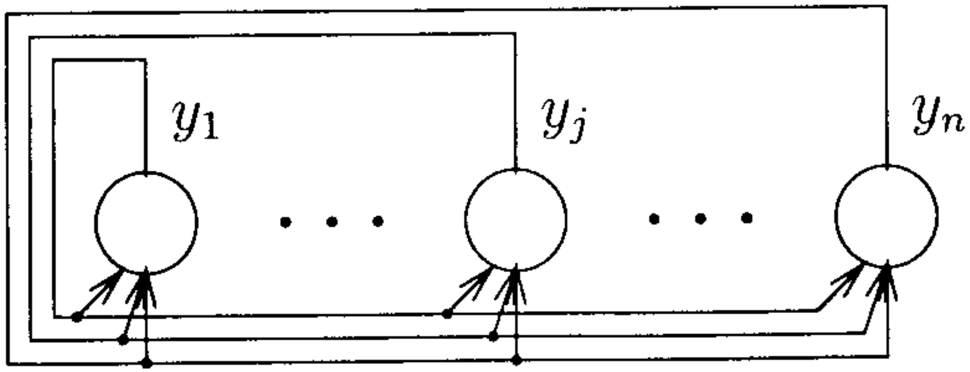
Charakter signálov, ktoré vstupujú do siete

- **diskrétny vstup** - vstupné hodnoty sú nezávislé na čase - nazývame ich tiež *statickými veličinami*, v každom časovom kroku je na vstup siete podaná jedna množina vstupných hodnôt, ktorá je nahradená inou množinou až pri prechode na ďalší krok
- **spojitý vstup** - vstupný signál je spojitá veličina, ktorá je funkciou času, mení sa teda neustále počas práce siete

Pre siete so spojitým vstupom je veľmi dôležitý spôsob, akým je reprezentovaný čas a veličiny, ktoré sú na ňom závislé.

Hopfieldova sieť

- Hopfieldova sieť so svojím učiacim algoritmom patrí do triedy plne rekurentných sietí s binárnym vstupom, trénovaných bez dozoru. Po prvýkrát ju popísal J. J. Hopfield v roku 1982.



Hopfieldova sieť

- **Topológia siete.** Každý neurón v sieti je prepojený so všetkými ostatnými neurónmi, pričom prepojenia sú symetrické, to znamená, že $w_{ij}=w_{ji}$ pre $i,j=1,\ldots,n$. Žiaden neurón však nemá prepojenie samého so sebou, teda $w_{ii} = 0$ pre $i=1,\ldots,n$.
- Neuróny sa môžu nachádzať v dvoch stavoch - jeden z nich je charakterizovaný aktivačnou hodnotou +1 a druhý aktivačnou hodnotou -1. Stav i-teho neurónu označíme s_i. Teda platí $s_i = \pm 1$.
- Aktivačná hodnota (stav) každého neurónu je daná vzťahom

$$s_i = g(h_i) = g\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i\right)$$

- kde h_i je celkový vstup do i-teho neurónu a $x_1,\ldots,x_n$ sú vstupné hodnoty neurónov, ktoré spolu tvoria vstupný vektor $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, pričom platí, že $x_i = \pm 1$. Pre Hopfieldovu sieť budeme používať aktivačnú funkciu $g(x)=sgn(x)$ – tvrdé ohraničenie. Vektor aktivačných hodnôt (stavov) všetkých neurónov $\mathbf{s}=(s_1,\ldots,s_n)$ tvorí **stav siete**

Hopfieldova sieť

- Pre jednoduchosť pridáme do siete dodatočný neurón s konštantným výstupom -1, takže ďalej môžeme uvažovať prahové hodnoty θ_i = 0 a vzťah napísať v tvare

$$s_i = g\left(\sum_{j=0}^{n} w_{ij} x_j\right)$$

- Práca siete spočíva v tom, že stavy neurónov v čase t sú opäť použité na vstupe siete v čase t+1, takže

x_i(t+1)= s_i(t) pre i=1,…,n

- a teda sieť v každom časovom kroku upravuje stavy neurónov podľa pravidla

$$s_i(t+1) = g\left(\sum_{j=0}^{n} w_{ij} x_j(t+1)\right) = g\left(\sum_{j=0}^{n} w_{ij} s_j(t)\right)$$

Hopfieldova sieť

- až kým sa stav siete nezmení v dvoch po sebe nasledujúcich krokoch, teda nastane rovnosť

  $s_i(t) = s_i(t+1) = s_i$ pre $i=1,\dots,n$ (*)

- Tento stav siete $\mathbf{s}=(s_1,\dots,s_n)$ nazývame **stabilným stavom.**

- Aktivačné hodnoty (stavy) s_i neurónov po konvergencii tvoria výstup siete, teda

  $y_i = s_i$ pre $i=1,\dots,n$

- Všetky vektory $\mathbf{y}=(y_1,\dots, y_n)$, ku ktorým skonverguje sieť, ak na jej vstup podávame rôzne vektory $\mathbf{x}=(x_1,\dots, x_n)$, nazývame **exemplárnymi vzormi** siete. Pre každý exemplárny vzor teda platí pre i=1,..., n

$$s_i = g\left(\sum_{j=0}^{n} w_{ij} s_j\right)$$

Algoritmus pre Hopfieldovu sieť ako asociatívnu pamäť

- *1.krok:* Priradenie váh prepojeniam
- $$w_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_i^k x_j^k & \text{ak } i<>j \\ 0 & \text{ak } i=j \end{cases}$$
- *2.krok:* Inicializácia siete neznámym vstupným vzorom **x**=($x_1,\ldots,x_n$)
- $s_i(0)= x_i$ $\quad i=1,\ldots,n$
- kde $s_i(0)$ je stav i-teho neurónu v čase t=0
- *3.krok:* Iterácia, kým sieť neskonverguje, i=1, 2, …, n
- $$s_i(t+1) = g\left(\sum_{j=0}^{n} w_{ij} s_j(t)\right)$$
- opakujeme pre $t=0,1,\ldots$, až pokiaľ neplatí $s_i(t+1) = s_i(t) = s_i$ a teda
- sieť skonvergovala
- *4.krok:* Ohodnotenie výstupného vektora
- $y_i = s_i \quad i=1,\ldots,n$

Hopfieldova sieť

- **Obmedzenia siete.** Hopfieldova sieť má niekoľko základných obmedzení, ktoré podmieňujú jej schopnosť plniť úlohu asociatívnej pamäti.

- Prvým je obmedzenie počtu vzorov, ktoré je sieť schopná uchovávať. Bolo dokázané (Amit, 1989), že ak máme sieť pozostávajúcu z *n* neurónov, pre počet exemplárnych vzorov *m* platí ohraničenie $m \leq 0.15*n$ na to, aby vstupné vzory boli správne rozoznané s pravdepodobnosťou 0.99. Táto nerovnosť platí pre siete s veľkým počtom neurónov.

- Ďalšou podmienkou je, aby vzájomná korelácia (súvsťažnosť) vzorov potrebných na uchovanie bola čo najmenšia alebo žiadna. Mierou korelácie dvoch vzorov **a**, **b** môže byť

$$u = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Hopfieldova sieť

- Z tejto rovnosti vyplýva, že $u \in \langle -1,1 \rangle$. Ak u je blízke 0, hovoríme, že korelácia medzi vzormi **a** a **b** je malá. Ďalšou mierou korelácie je funkcia

$$h = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - b_i\right|$$

- ktorá sa tiež nazýva *Hammingova vzdialenosť* a nadobúda hodnoty z intervalu $\langle 0,n \rangle$.
- Pritom koreláciu medzi vzormi považujeme za malú, ak hodnota h je blízko (1/2)n. Počas práce Hopfieldovej siete môže tiež dôjsť k situácii, keď sieť opakovane prechádza medzi dvoma stavmi, ktoré majú rovnakú hladinu energie, čo zabraňuje konvergencii. Tento jav sa nazýva **oscilácia** siete.
-

Hopfieldova sieť

- **Zhrnutie.**
- Ak zohľadníme hlavné obmedzenia Hopfieldovej siete, táto nachádza veľké uplatnenie najmä pre problémy rozpoznávania vzorov s binárnou reprezentáciou.
- Takými sú napríklad čierno-biele obrazy reprezentované pomocou matice pixelov, pričom každý bod obrazu má hodnotu -1 (biely) alebo 1 (čierny). Vhodná je tiež pre použitie pre optimalizačné problémy.

Konvergencia Hopfieldovej siete

- Výpočet jedného neurónu, stav i-tého neurónu - V_j
- Výpočet bude pokračovať, pokiaľ nebude dosiahnutý stabilný stav
- Každý neurón dostane váženú sumu vstupov od iných neurónov :

$$h_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} V_i . w_{j,i}$$

  - Ak vstup h_j je pozitívny, stav bude 1, inak 0:

$$V_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } h_j \geq 0 \\ 0 & \text{ak } h_j < 0 \end{cases}$$

Konvergencia Hopfieldovej siete

- Dosiahne niekedy Hopfieldova sieť stabilný stav (konverguje)?
- Aby sme to vyhodnotili, hodnotu **„energie“** asociujeme so sieťou :

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{j}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} w_{j,i} V_i V_j$$

- Systém bude skonvergovaný, keď energia bude minimalizovaná

Konvergencia Hopfieldovej siete

- Prečo konvergujú?

$$h_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} V_i . w_{j,i} \qquad V_i = \begin{cases} 1 & \text{if } h_i \geq 0 \\ 0 & \text{if } h_i < 0 \end{cases}$$

$$E = -\frac{1}{2} \sum_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} w_{j,i} V_i V_j = -\frac{1}{2} \sum_j V_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} w_{j,i} V_i = -\frac{1}{2} \sum_j V_j h_j$$

$$\text{ak } h_j > 0 \text{ a } V_j = 1, \text{ potom } V_j \text{ sa nezmení } \rightarrow V_j h_j = h_j > 0$$

$$\text{ak } h_j > 0 \text{ a } V_j = 0, \text{ potom } V_j \text{ sa zmení na } 1 \rightarrow V_j h_j > 0$$

$$\text{ak } h_j < 0 \text{ a } V_j = 0, \text{ potom } V_j \text{ sa nezmení } \rightarrow V_j h_j = 0$$

$$\text{ak } h_j < 0 \text{ a } V_j = 1, \text{ potom } V_j \text{ sa zmení na } 0 \rightarrow V_j h_j = h_j = 0$$

Teda príspevok od každého člena je nezáporny, teda zmenou stavu energia nerastie.

Konvergencia Hopfieldovej siete

- Zmeny E pri zmene stavu neurónu:

$$h_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} V_i . w_{j,i} \qquad V_j = \begin{cases} 1 & \text{ak } h_j \geq 0 \\ 0 & \text{ak } h_j < 0 \end{cases} \qquad E = -\frac{1}{2}\sum_j \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} w_{j,i} V_i V_j = -\frac{1}{2}\sum_j V_j h_j$$

$$\Delta E = E_{new} - E_{old} = \left(-\frac{1}{2}\sum_{j\neq k} V_j h_j - \frac{1}{2} V_{k\,new} h_k\right) - \left(-\frac{1}{2}\sum_{j\neq k} V_j h_j - \frac{1}{2} V_{k\,old} h_k\right) = -\frac{1}{2}(V_{k\,new} - V_{k\,old}) h_k = -\frac{1}{2}\Delta V_k . h_k$$

$$\text{ak } V_{k\,old} = 1 \text{ a } h_k > 0 \Rightarrow V_{k\,new} = 1 \Rightarrow \Delta V_k = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\Delta V_k . h_k = 0$$

$$\text{ak } V_{k\,old} = 1 \text{ a } h_k < 0 \Rightarrow V_{k\,new} = 0 \Rightarrow \Delta V_k = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\Delta V_k . h_k < 0$$

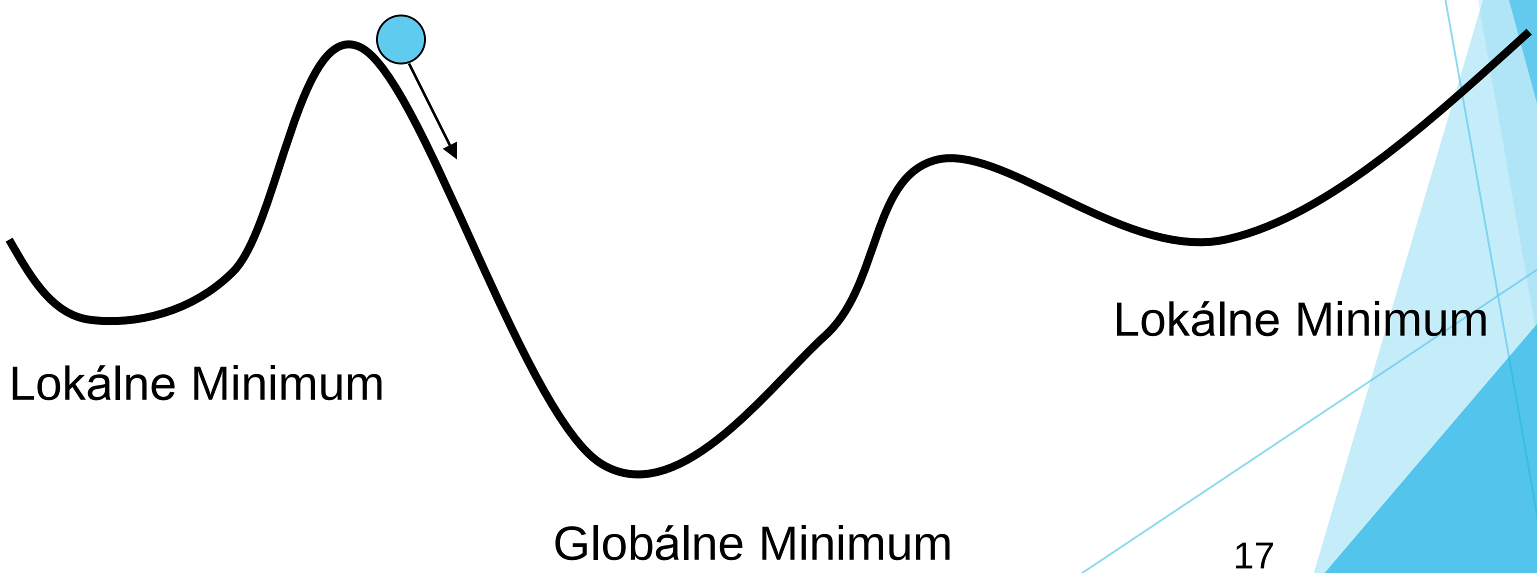
$$\text{ak } V_{k\,old} = 0 \text{ a } h_k < 0 \Rightarrow V_{k\,new} = 0 \Rightarrow \Delta V_k = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\Delta V_k . h_k = 0$$

$$\text{ak } V_{k\,old} = 0 \text{ a } h_k > 0 \Rightarrow V_{k\,new} = 1 \Rightarrow \Delta V_k = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\Delta V_k . h_k < 0$$

V každom prípade energia bude klesať alebo zostane nezmenená, a teda sieť sa snaží dost16ať do stabilného stavu.

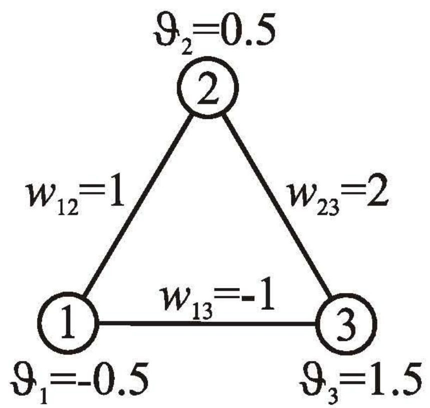
Energetická funkcia

- Energetická funkcia je podobná viacrozmernému (N) terénu



Z knihy od prof. Kvasničku

Ilustračný príklad 1 Hopfieldovej siete



$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = \left(-0.5, 0.5, 1.5\right)$$

Priesvitka 10

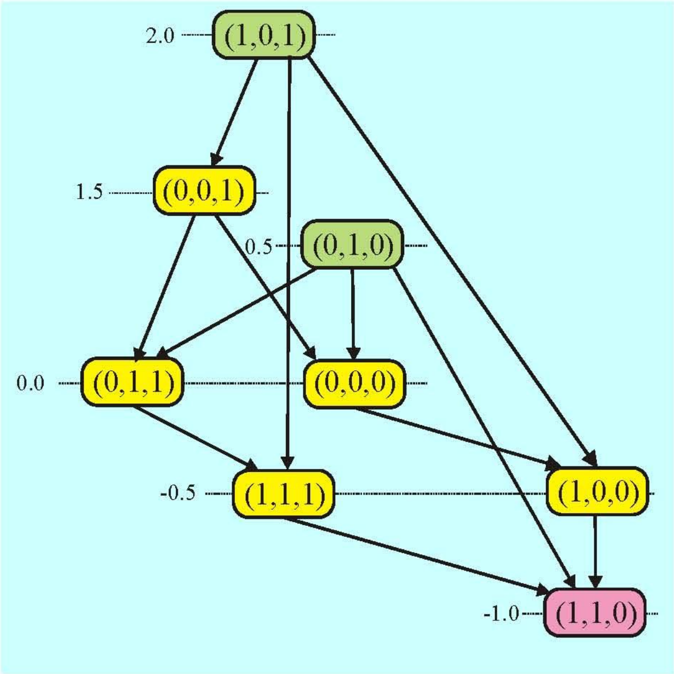
Funkčné hodnoty energie pre stavy z $\{0, 1\}^3$

	Stavy	Energia
x1	(0,0,0)	0
x2	(0,0,1)	1.5
x3	(0,1,0)	0.5
x4	(0,1,1)	0
x5	(1,0,0)	-0.5
x6	(1,0,1)	2.0
x7	(1,1,0)	-1.0
x8	(1,1,1)	-0.5

Z knihy od prof. Kvasničku

$$E(\boldsymbol{x}) = -\left(x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3\right) + \left(-0.5x_1 + 0.5x_2 + 1.5x_3\right)$$

stav.vektor		$E(x)$
$\boldsymbol{x}_1$	(0,0,0)	0
$\boldsymbol{x}_2$	(0,0,1)	1.5
$\boldsymbol{x}_3$	(0,1,0)	0.5
$\boldsymbol{x}_4$	(0,1,1)	0
$\boldsymbol{x}_5$	(1,0,0)	-0.5
$\boldsymbol{x}_6$	(1,0,1)	2.0
$\boldsymbol{x}_7$	(1,1,0)	-1.0
$\boldsymbol{x}_8$	(1,1,1)	-0.5



Vlastnosti:

- Spojené orientovanou čiarou sú len také dva stavy, medzi ktorými je jednotková Hammingova vzdialenosť.

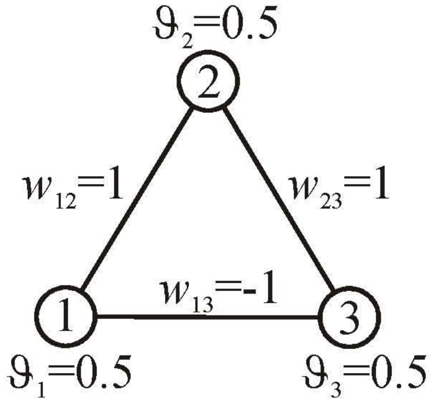
 Priesvitka 11

Konštrukcia stavového diagramu

- Začneme stavom s najväčšou energiou
- Analyzujeme všetky možné stavy, ale z pohľadu že sa zmenil stav len jedného neurónu
- Sledujeme, že energia klesá

- Stavy môžeme charakterizovať na vstupné (zelené), výstupné (červené) a prechodné (žlté).

Ilustračný príklad 2 Hopfieldovej siete

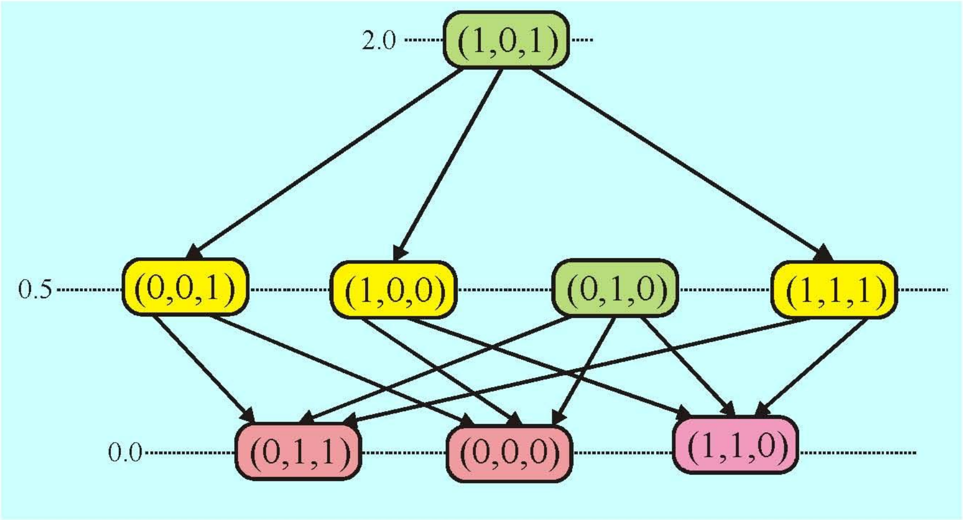


$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = (0.5, 0.5, 0.5)$$

Z knihy od prof. Kvasničku

$$E(\mathbf{x}) = -\left(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3\right) + \left(0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3\right)$$

stav.vektor		$E(x)$
$\mathbf{x}_1$	(0,0,0)	0
$\mathbf{x}_2$	(0,0,1)	0.5
$\mathbf{x}_3$	(0,1,0)	0.5
$\mathbf{x}_4$	(0,1,1)	0
$\mathbf{x}_5$	(1,0,0)	0.5
$\mathbf{x}_6$	(1,0,1)	2.0
$\mathbf{x}_7$	(1,1,0)	0
$\mathbf{x}_8$	(1,1,1)	0.5



Priesvitka 13

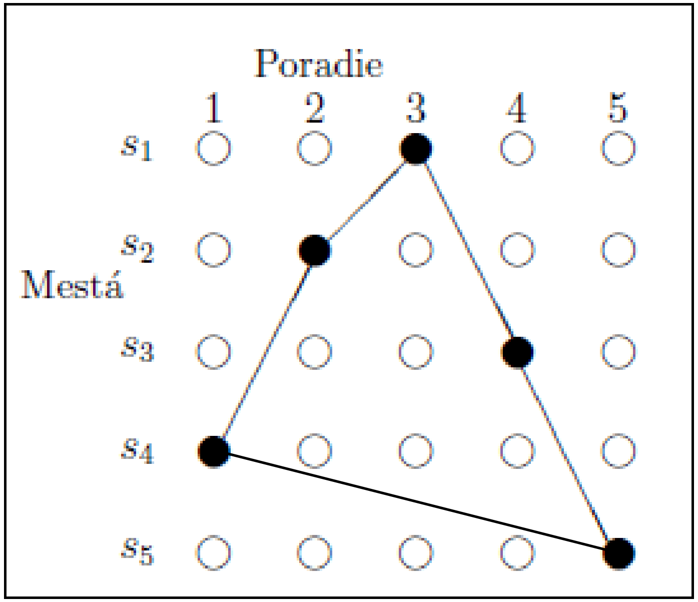
Problém obchodného cestujúceho

- Majme danú množinu n miest a vzdialenosť d(i,j) pre všetky dvojice miest [i, j]. Potrebujeme zistiť, v akom poradí má obchodný cestujúci prechádzať mestá tak, aby sa vrátil do mesta, z ktorého vyrazil a zároveň každé mesto na trase navštívil práve jedenkrát. Podmienkou však je, že vzdialenosť, ktorú precestoval, je najkratšia možná.

- Riešenie tohto problému je prípustné, ak sú splnené nasledujúce obmedzenia :
- obchodný cestujúci prechádza každým mestom práve jedenkrát,
- jeho cesta v grafe tvorí cyklus.

Príklad – 5 miest

Návrh siete.
Kvôli prehľadnosti nie sú zakreslené prepojenia neurónov. Riešenie je zobrazené pomocou čiar. Riešením je postupnosť miest 4-2-1-3-5-4, prípadne jej cyklická permutácia.



Problém obchodného cestujúceho

Teraz sformulujeme túto úlohu pomocou novej sústavy dvojstavových premenných tak, aby hľadanie prípustného riešenia mohlo byť vyjadrené ako minimalizácia funkcie týchto nových premenných.

Zadefinujme maticu V typu n x n s prvkami V{i,j}, ktoré nadobúdajú hodnoty 0 alebo 1, pre i, j = 1,..., n.

V{i,j}= 1 vtedy, keď obchodný cestujúci prechádza mestom i v j-tom kroku. V opačnom prípade V{i,j} = 0.

Prípustnému riešeniu pôvodnej úlohy teraz zodpovedá stav matice, ktorý sa dá popísať nasledovne :

- v každom riadku je najviac jedna jednička, t. j. pre x-te mesto platí V{x,j}*V{x,l}=0, ak j <> l,
- v každom stĺpci je najviac jedna jednička, t. j. pre x-ty krok obchodného cestujúceho platí V{i,x}*V{k,x}=0$, ak i <> k,
- v matici je práve n jedničiek, t. j. ∑i∑j V{i,j}=n,
- súčet vzdialeností medzi mestami je určený maticou vzdialeností, pričom celková dĺžka cesty je

  0.5 * ∑i ∑{k<> i} ∑y d(k,i)*V{k,y}*(V{i,y-1}+V{i,y+1})